

L'histoire et la profondeur des résultats mathématiques : le débat post-Cavaillès de l'épistémologique française

GABRIELLA CROCCO⁽¹⁾

Résumé. Qu'est-ce qu'un résultat mathématique profond, et quels critères épistémologiques faut-il mettre en œuvre pour caractériser la valeur de la profondeur dans l'analyse de l'histoire des mathématiques ? Cet article propose une analyse comparative des travaux de Gilles-Gaston Granger et d'Alain Michel sur cette question. Nous suggérons que les différences entre les positions de ces deux auteurs sur le thème de la profondeur indiquent un désaccord plus fondamental concernant la conception de l'histoire des mathématiques. Granger, avec Cavaillès, cherche à identifier les structures transcendantales d'une sorte de nécessité créatrice, qui demeurerait toutefois incompatible avec toute forme de prédictibilité de l'évolution des mathématiques. Michel, avec Brunschvicg et Canguilhem, conçoit le progrès mathématique comme l'exploration d'un champ ouvert de possibilités et estime qu'il n'est possible d'y voir un développement nécessaire qu'avec un regard rétrospectif, indifférent aux détails de l'analyse historique.

Mots-clés. Granger ; Michel ; Cavaillès ; Brunschvicg ; Canguilhem ; résultat mathématique profond ; progression des mathématiques.

(1) L'autrice remercie Frédéric Patras, pour les précieux éclairages mathématiques sur l'article de Granger (*What is profound result in mathematics?*), partagés lors du séminaire qu'il a tenu à Aix le 11/04/2023. Ce séminaire est consacré depuis 2020 à lecture de l'œuvre de Granger. <https://centreganger.cnrs.fr/spip.php?article882>.

§ — Introduction.

Nous publions ici la traduction anglaise de deux articles d'Alain Michel : « Mathématiques et 'profondeur' : l'exemple de la théorie des nombres », ⁽²⁾ et « Jean Cavaillès dans l'héritage de Léon Brunschvicg » ⁽³⁾. Ces deux articles révèlent la coexistence de deux traditions dans la philosophie des mathématiques française, lesquelles diffèrent essentiellement par leur conception de l'histoire. La première tradition s'enracine dans l'œuvre de Léon Brunschvicg (et par de-là d'Emile Boutroux). Elle conçoit le progrès mathématique comme l'exploration d'un champ ouvert de possibilités, et considère qu'il n'est possible d'y voir un développement nécessaire qu'avec un regard rétrospectif et inattentif aux détails de l'analyse historique. Dans le panorama de la philosophie des mathématiques française du XX^e siècle, Alain Michel est l'un des représentants de cette tradition. La seconde, dont Cavaillès est le promoteur, cherche la structure d'une nécessité créatrice dans le développement pourtant imprédictible des mathématiques. Gilles-Gaston Granger développe cette conception, en particulier avec l'introduction du principe de dualité entre opération et objet.

Notre projet d'origine était d'illustrer ces deux traditions en présentant conjointement deux articles sur la notion de profondeur en mathématique, l'un de Granger « What is a profound result in mathematics ? », ⁽⁴⁾ l'autre de Michel, que nous venons de mentionner, « Mathématiques et 'profondeur' : l'exemple de la théorie des nombres ». Notre objectif était de proposer au public non francophone une illustration concrète des implications de ce débat sur la nature de l'histoire, en révélant les différences qu'il suscite quant à cette notion épistémologiquement troublante qu'est celle de la profondeur. Les droits exorbitants demandés par l'éditeur Springer pour la republication de l'article de Granger a rendu ce projet impossible. Pour remédier à cette difficulté, nous proposons ici une analyse comparative des conceptions de la profondeur défendues par Granger et Michel en nous appuyant sur leurs écrits. En liant

(2) Alain Michel, « Mathématiques et « profondeur » : l'exemple de la théorie des nombres », *Jean-Toussaint Desanti, une pensée et son site*, Georges Ravis-Giordani (textes réunis par), Fontenay-aux-roses (Hauts-de-Seine) : ENS Éditions, 2000, p. 181-199.

(3) Alain Michel, « Jean Cavaillès dans l'héritage de Léon Brunschvicg ». *Revue de Métaphysique et de Morale*, 1, (2020), p. 9-36.

(4) G.G. Granger, (« What is a profound result in mathematics ? » dans E. Agazzi et G. Darvas (eds), *Philosophy of Mathematics today*, Kluwer (1997) p. 89-100.

le thème de la profondeur à celui du travail créatif du mathématicien, ces deux articles illustrent les deux pôles opposés du débat sur la nature de l'histoire des mathématiques qui a animé la tradition française, et qui n'est certainement pas restreint à la seule philosophie des mathématiques puisque, en dernier ressort, il porte sur la question « qu'est-ce que connaître ? ».

§ 1. — Circonstances d'élaboration et enjeux théoriques de la notion de profondeur.

Rappelons d'abord quelques faits, car notre aperçu sur le débat concernant la notion de profondeur s'inscrit dans les relations que nos deux auteurs ont tissés durant au moins sept ans au sein d'un séminaire animé à Aix-en-Provence par Granger.

Gilles-Gaston Granger (1920-2016), a été, comme Jules Vuillemin (1920-2001), Jean-Toussaint Desanti (1914-2002) et bien d'autres, l'un des élèves de Jean Cavaillès à l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm. Alain Michel (1946-2017), élève de Desanti à l'École Normale Supérieure de St Cloud et grand lecteur de Georges Canguilhem (1904-1991), a travaillé entre 1989 et 2012 au Séminaire d'Épistémologie Comparative, fondé par Granger, à l'Université de Provence (devenue Aix Marseille Université).

Les deux articles sont présentés la même année (1997) bien que la publication de celui de Granger réélabore le texte d'une conférence donnée auparavant et qui, très probablement, a dû être présentée au public du Séminaire d'Épistémologie Comparative, dont Michel était membre. L'article de ce dernier, a été présenté en l'honneur, et en présence, de Desanti, lors d'un colloque, en Juin 1997 à Bastia, avant d'être publié en 2000. Michel a donc pris connaissance du travail de Granger sur la profondeur, directement par la lecture de l'article ou lors des séances du Séminaire aixois, et il semble réagir ici à l'analyse de Granger, en prenant le contre-pied d'une série de ses thèses. La portée critique de ce travail sur l'œuvre de Granger est importante car elle s'insère dans le cadre plus général d'un bilan de l'héritage philosophique de Cavaillès et de la tradition épistémologique française, touchant directement à la question centrale de la place de l'histoire des sciences pour la philosophie et, en particulier, du rôle de l'histoire des mathématiques pour l'épistémologue qui essaye de comprendre, à travers les mathématiques, le « travail » de la raison.

Granger a revendiqué explicitement l'héritage de Cavaillès au moins dans trois articles publiés avant et après « What is a profound result in mathematics ? ». Il s'agit de « Cavaillès ou la montée vers Spinoza », ⁽⁵⁾ « Jean Cavaillès et l'histoire » ⁽⁶⁾ et « Cavaillès et Lautman, deux précurseurs ». ⁽⁷⁾ Dans ce dernier, Granger souligne avec force trois aspects qui le lient à Cavaillès, précurseur de ses propres tentatives de développer un « rationalisme fondé sur une interprétation précise des œuvres des sciences » (p. 301). Ces trois aspects sont les suivants. D'abord, la thèse de Cavaillès d'une production des objets mathématiques par un système de « gestes » gouverné par des règles, que Granger développe dans son œuvre par l'idée du travail mathématique comme distinction et association dynamique d'une matière et d'une forme, c'est-à-dire d'objets et de structures. Ensuite les notions, développées par Cavaillès, de paradigme et de thématization qui constituent les moments du double mouvement qui explicite les structures. On les retrouve, bien que transformés, dans le principe de dualité de Granger. Enfin, l'importance pour Cavaillès d'une histoire de l'expérience mathématique, entendue comme système d'actions où les concepts sont amenés à l'existence par notre travail et où, selon Granger, il est possible de distinguer un aspect subjectif, lié à la « conscience » du mathématicien qui les produit, en tant qu'opérations de pensées isolées, et les véritables concepts mathématiques, résultats « d'une systématisation des actes opérateurs, introduisant des contenus et [allant] au-delà des actes en tant qu'ils procèdent d'un sujet ». (p. 300). Granger développera pleinement ce legs de Cavaillès en forgeant son concept de style (voir plus bas).

Par ailleurs Granger n'a pratiquement jamais mentionné l'œuvre du maître de Cavaillès et Lautman, Léon Brunschvicg (1869-1944), qui les a pourtant influencés, ni celle de Canguilhem, condisciple, lui aussi, de Brunschvicg. ⁽⁸⁾

Michel, dont la thèse d'état *Étude sur la constitution et les développements de la théorie moderne de l'intégration* ⁽⁹⁾ avait été dirigé

(5) G.G. Granger, « Cavaillès ou la montée vers Spinoza », *Les études philosophiques*, 2, (1947) pp271-279.

(6) G.G. Granger, « Jean Cavaillès et l'histoire », *Revue d'Histoire des sciences*, 49(4) (1996), pp569-582, réédité dans *Philosophia Scientia* 3 (1) (1998), pp569-582.

(7) G.G. Granger « Cavaillès et Lautman, deux précurseurs », *Revue Philosophique*, 3(2), (2002), pp293-301.

(8) Dans des conversations privées, Michel mentionnait la défiance de Granger à l'égard des œuvres de Canguilhem et de Desanti.

(9) Une version remaniée de cette thèse a été publiée sous le titre *Constitution de la théorie moderne de l'intégration*, Vrin (2002).

par Desanti, s'est exprimé explicitement dans l'un de ses derniers articles, rédigé en 2016, « Jean Cavaillès dans l'héritage de Léon Brunschvicg »⁽¹⁰⁾ sur le bilan qu'il convenait de tirer de l'œuvre de Cavaillès. Brunschvicg et Cavaillès s'accordent, selon l'analyse de Michel, sur la thèse que l'histoire est le seul moyen dont dispose le philosophe pour comprendre l'esprit (Brunschvicg) et pour construire une théorie de la raison (Cavaillès). Mais ce qui les sépare touche à la question essentielle du statut de la modalité du jugement historique : la nécessité selon Cavaillès, la possibilité selon Brunschvicg. La question est cruciale. Pour Cavaillès, si l'analyse historique des mathématiques permet de déceler des catégories stables sur lesquelles puisse se dessiner le progrès de la raison, alors il est possible de parler d'une certaine nécessité dans le progrès des mathématiques mêmes. Cette nécessité, dont Cavaillès aurait trouvé une exemplification essentielle dans l'œuvre de Dedekind, ne s'oppose ni à l'idée d'une contingence des conditions de production, propres au contexte historique dans lequel les concepts mathématiques émergent, ni à l'idée d'une imprévisibilité des résultats, due à l'inévitable opacité des objets mathématiques. Le point crucial est que l'émergence de concepts nouveaux est dans chaque cas le résultat du dynamisme interne propre aux mathématiques : il s'agit d'un engendrement nécessaire de nouveaux objets à partir de la position de nouvelles opérations rendues nécessaires par l'émergence de nouveaux problèmes. Ce développement est nécessaire au sens où il n'est pas pluriel (la négation d'une thèse mathématique donnant lieu à un développement alternatif est impossible).⁽¹¹⁾

En revanche, pour Brunschvicg, comme ce sera le cas pour Canguilhem dans ses propres domaines de prédilection, les sciences de la vie, le progrès scientifique procède par l'exploration d'un champ ouvert de possibilités où seul un regard rétrospectif et inattentif aux détails de l'analyse historique peut prétendre voir de la nécessité. Bref, pas plus que l'histoire tout court, l'histoire des mathématiques n'est nécessaire. D'où son rôle central, et à vrai dire irremplaçable, comme terrain de l'analyse philosophique.

Cette comparaison entre les pensées de Brunschvicg et de Cavaillès, que Michel développe dans son article de 2016, est plus

(10) A. Michel, « Jean Cavaillès dans l'héritage de Léon Brunschvicg ». *Revue de Métaphysique et de Morale*, 1, (2020), pp 9-36. (Traduction anglaise dans ce numéro).

(11) Pour une position tout à fait opposée à celle-ci, voir J. Vuillemin, *Philosophie de l'algèbre* PUF (1993) § 56, p 505 (première édition 1962).

qu'un riche et profond bilan de l'héritage de Cavaillès. C'est également pour lui l'occasion de faire converger une série de remarques qui émaillent son œuvre dont « Mathématique et 'profondeur' » constitue un maillon important. La relation avec Granger a pu être, en ce sens, le catalyseur d'une réflexion soutenue sur ce qui divise, dans l'épistémologie française, les deux traditions issues de Brunschvicg et que, pour aller vite, on pourra nommer la tradition Cavaillès-Granger et Canguilhem-Michel.⁽¹²⁾

Le double distance de Granger par rapport à Brunschvicg — la première, avec Cavaillès, avec la thèse de la nécessité mathématique et la deuxième, à partir de Cavaillès, selon laquelle une théorie générale du style conditionnerait l'analyse historique — semble donc être la cible de la critique implicite que Michel adresse à Granger.

§ 2. — La profondeur mathématique : deux cadres différents d'analyse.

Nos deux auteurs s'accordent pour affirmer que le terme profondeur, utilisé avec d'autres termes comme beauté, élégance et puissance, apparaît souvent dans les commentaires des mathématiciens à propos de certains travaux de leurs propres confrères. Ces termes servent généralement à désigner un résultat qui occupe une

(12) On remarquera que dans l'article « Jean Cavaillès dans l'héritage de Léon Brunschvicg » (*op.cit.*) Michel non seulement reprend toute entière dans la partie finale de cet article la conclusion de 1997 de "Mathématique et profondeur" sur Kronecker, mais les questions soulevées par cette analyse sont reprises en 1998, dans l'article « Après Jean Cavaillès, l'histoire des mathématiques » (*Philosophia Scientiae*, 3 (1), 1998, pp 113-137) où « l'intuitionnisme arithmétique » de Kronecker est cité encore une fois comme une raison nous contraignant à reconsidérer en profondeur certaines des conclusions de Cavaillès quant à la nature de l'histoire. De plus l'article d'hommage à Granger que Michel publie en 1995, où le matériel historique analysé pour mettre à l'épreuve les concepts de dualité et d'invariance centraux pour l'œuvre de Granger provient de sa thèse d'état sur la théorie de la mesure, se termine à son tour par une phrase qui convoque encore une fois Cavaillès et Granger sur la question de l'histoire : « Si le philosophe peut s'essayer à décrire, dans les catégories, des *a priori*, 'non antérieurs à la science' mais 'âme même de la science' selon les termes que Cavaillès utilisait à propos de Bolzano, il doit convenir en même temps que celles-ci restent soumises aux conditions qu'engendre leur investissement opératoire, ce qui revient à reconnaître qu'elles se constituent dans une histoire, impliquant pour leur contenu des modifications imprévisibles ». « Analyse épistémologique et histoire des mathématiques » dans *La connaissance philosophique. Essais sur l'œuvre de Gilles-Gaston Granger*. J. Proust et E. Schwartz (éds), PUF (1995) p 210.

place clef dans les recherches de leur discipline. Il s'agit donc de l'indice d'une analyse épistémologique spontanée, comme l'appelle Michel, d'un geste réflexif d'une communauté sur sa pratique passée et présente, qui mérite pour cette raison d'être analysé. Il révèle en effet une appréciation de valeur d'un résultat mathématique en tant que moment du processus de création concrète de la discipline mathématique, création conceptuelle, mais tout de même création, dont la valeur devrait faire l'objet d'un consensus, étant donné qu'elle relèverait de propriétés intrinsèques et objectives du travail mathématique.

La question est donc la suivante : l'usage de ce terme dans les commentaires des mathématiciens sur les œuvres mathématiques du passé peut-il nous donner des informations importantes pour la connaissance interne des mathématiques, connaissance cruciale pour le philosophe qui souhaite élaborer une théorie de la raison ? Et plus généralement, est-il possible de saisir conceptuellement (au de-là de l'usage dans tel ou tel texte donné par tel ou tel mathématicien) les caractéristiques de la profondeur mathématique ?

La question posée, il faut souligner la différence des cadres dans lesquelles nos deux auteurs poursuivent leur enquête.

Pour Granger il s'agit d'une question qui appartient à la stylistique. La question est en effet « related to a mathematical result or even to the position of a problem insofar as it is a *work*, that is to say the way in which a form and a content are found to be created and placed in relation » (p 89). Nous avons déjà mentionné plus haut l'importance de cette notion de distinction et mise en relation de formes et contenus qui aboutit à la création de structures et d'objets. Ici il conviendra toutefois de souligner un passage très explicite de la conclusion de la seconde édition de son *Essai d'une philosophie du style*, qui nous permettra de bien comprendre les relations entre enquête épistémologique, enquête historique et enquête stylistique selon notre auteur.

« Dans le domaine des mathématiques on s'aperçoit bientôt que la curiosité du philosophe s'exerce dans trois directions. Une philosophie des mathématiques est d'abord, en effet, le commentaire d'une histoire des concepts. Envisagé sur le plan d'une évolution technologique de l'outillage mathématique, ou sur le plan d'une évolution des *catégories* constitutives de l'objet, ce commentaire demeure très étroitement associé à l'histoire. Mais une philosophie des mathématiques c'est aussi, en second lieu, un commentaire sur la systématisme interne des théories. L'épistémologie se trouve alors

associée à la logique. Reste enfin la direction de la stylistique. C'est alors la création et l'usage des structures qui sont en vedette. Non pas, certes, le déroulement historique qui conduit aux inventions, mais le rapport de la forme à la matière latent ou explicité, clair ou confus, qui conditionne, accompagne, limite, l'institution d'une structure et son usage effectif. Une telle analyse s'applique à tous les grands moments de la pensée mathématique; elle nous semble tout particulièrement indispensable dans les cas nombreux où une même structure apparaît sous différents modes, introduite et utilisée selon différents styles. Tels par exemple le calcul des fluxions de newtonien et l'analyse infinitésimale leibnizienne. Mais dans tous les cas c'est le point de vue stylistique qui peut donner à une philosophie mathématique la dimension rationnelle concrète, celle d'un *travail* essentiel, que l'analyse des systèmes évidemment néglige, et dont l'analyse historique ne peut donner qu'une vision cavalière souvent trompeuse ». ⁽¹³⁾

On se limitera à souligner trois aspects de ce long passage qui nous semble par ailleurs très clair sur le rôle que la stylistique est amenée à jouer par rapport aux autres aspects de l'enquête philosophique sur la science. D'abord, l'analyse historique est cantonnée à l'analyse de l'évolution du symbolisme (l'outillage mathématique) et des catégories constitutives des objets (l'outillage opérationnel, structurel que le symbolisme doit exprimer avec la plus grande clarté). Ces deux aspects sont très marqués dans l'analyse des exemples historiques que Granger prendra en compte dans l'article sur la profondeur. Granger est en ce sens fidèle à la conception de Cavaillès où la mise en forme symbolique des « gestes » (des opérations structurelles à l'intérieur desquelles les objets sont définis) est une condition essentielle de l'enquête philosophique. Ensuite, l'analyse logique est essentielle car elle permet d'analyser la puissance et donc la fécondité des théories mise en place au cours de l'histoire. Les relations de dépendance conceptuelle internes et externes à une théorie donnée constituent des éléments d'évaluation fondamentaux dans l'analyse des formes d'évolution de la pensée mathématique. Enfin, la dimension stylistique est cruciale, nous dit Granger, car la contingence des contextes de découverte et l'opacité des objets eux-mêmes nous font apparaître sous différents modes une *même structure*. Nous retrouvons ici une des conséquences du nécessitarisme évoqué plus haut. Dans le cadre de la

(13) G.G. Granger, *Essai d'une philosophie du style*. Odile Jacob (1988) p298. Première édition Armand Colin 1968.

conception de Granger, la structure est et doit être *la même*, modulo des différences de style. Ce ne sont en effet que ces différences stylistiques qui introduisent de la pluralité, sans toucher pour ainsi dire à l'essence singulière des objets mathématiques inventés.⁽¹⁴⁾ Des progrès mathématiques dans la généralité, la clarté et la puissance déductive des théories « inventées » ne peuvent qu'aboutir à des structures uniques d'objets de la raison. C'est bien l'exigence de Cavaillès que Granger fait sienne, tout en abolissant d'emblée, grâce à la stylistique, tout écart (« résidus » dit Alain Michel dans son article) entre ce que l'épistémologie prescrit et ce que l'histoire révèle. En un sens, toute éventuelle possibilité de mise à l'épreuve par l'histoire est neutralisée par l'idée que l'histoire ne peut être que « cavalière » et « trompeuse » dans ses analyses lorsque l'on cherche la « dimension rationnelle concrète » des mathématiques, c'est-à-dire l'unicité des structures dans la pluralité de leurs styles de création.

Le cadre d'analyse de la notion de profondeur choisi par Michel est tout à fait différent. L'objectif affiché est justement celui d'une mise à l'épreuve, par l'analyse historique, des thèses que le philosophe-épistémologue avance pour expliquer « comment la mathématique se produit » et comment on peut élucider, sur la base de cette explication, la notion de profondeur d'un résultat

(14) Invention qui, comme le souligne Granger dans son article de 1997, doit s'entendre dans le double sens de découverte et construction (p.99). Une métaphore du livre plus tardif *Science et réalité* peut aider à comprendre Granger sur ce point : « Une maison est la *création* de l'architecte et du maçon ; mais une fois construite elle est bien réelle, indépendamment de l'activité de ses créateurs ; elle n'a pu cependant exister que parce que sa structure et la nature de ses matériaux sont conformes aux conditions qui dérivent des lois de la physique et de la chimie, conditions nécessaires mais non suffisantes de sa réalité. Appliquant la métaphore aux objets mathématiques, nous dirons qu'ils sont bien été produits par l'imagination conceptuelle du mathématicien modérée par les exigences logiques nécessairement satisfaites ; mais une fois produit sous ces conditions, ces objets *devenus réels*, possèdent des propriétés difficiles à déduire, certaines mêmes imprévisibles, ou non déductibles » (*Science et réalité*, Odile Jacob 2001, p.116). Kurt Gödel dans sa conférence de 1951 (*Kurt Gödel, Collected Works vol III*, 1995, pp 304-323), avait déjà discuté un aspect de ce genre d'arguments par rapport aux conséquences de ses théorèmes d'incomplétudes, en soulignant l'étrangeté d'une situation dans laquelle le créateur d'un objet se trouve dans l'impossibilité théorique de connaître certaine propriété de l'objet créé, ne pouvant les reconnaître qu'en définissant des jeux de règles plus complexes et abstraits (G. Crocco, « Gödel and Carnap again », dans Paola Cantù, Georg Schiemer, *Logic, Epistemology, and Scientific Theories - From Peano to the Vienna Circle*, Springer 2023].

mathématique. Il s'agit de vérifier par l'histoire, si tout a réellement été dit par le philosophe-épistémologue, ou si l'application à l'histoire de l'analyse épistémologique, « aussi fine et précise soit-elle », laisse une part d'inéliminables résidus. Quelle théorie philosophico-épistémologique des mathématiques Michel va-t-il choisir pour cette mise à l'épreuve? Celle de Desanti. Et cela pour deux raisons qu'il explicite. D'une part, cette philosophie des mathématiques a fait d'elle-même place, spontanément pourrions-nous dire, au concept de profondeur dans sa tentative de restitution du « mouvement de production du savoir » (p. 184). D'autre part, avec son concept de « réactivation », elle laisse l'histoire (avec « ces voies de passage inédites ») dans l'horizon de son analyse, et donc laisse à l'analyse historique effective la place pour exercer son propre travail.

Ce n'est pas ici le lieu pour résumer l'analyse de Desanti. Michel en dit en quelques pages ce qui est essentiel pour son propos. Pour en aider la lecture on pourra juste rappeler que Desanti s'intéresse essentiellement à analyser les « médiations », c'est-à-dire les processus par lesquelles une théorie mathématique élémentaire se généralise et par conséquence se refonde en termes plus abstraits. La notion de réactivation, dans l'analyse de laquelle Desanti fait place à la notion de profondeur, est liée à la reconfiguration des liens entre les couches successives d'espaces de possibilités opératoires que ces généralisations libèrent et à la façon dans laquelle certaines généralisations « profondes » permettent de construire des voies de passage inédites entre des domaines jusqu'alors dissociés. À partir des concepts de cette théorie philosophico-épistémologique du processus de généralisation abstractive (médiation), considéré comme moteur de la création mathématique, Michel va essayer d'indiquer, avec l'exemple de Kronecker, l'existence d'une bifurcation, d'un résidu que l'analyse épistémologique semble négliger, et qui met en question le jugement de valeur concernant le travail de Dedekind et la sous-estimation du travail de Kronecker par Cavaillès et Granger.

§ 3. — Trois figures de la profondeur mathématique et deux conclusions opposées.

Au-delà de ces différences de cadre, la manière dans laquelle les deux auteurs organisent l'analyse des exemples permettant de montrer les caractéristiques générales de la notion de profondeur est assez similaire.

L'analyse de Granger. Granger distingue trois figures typiques de la profondeur. Celles-ci découlent de la combinaison de deux thèmes, souvent associés aux remarques des mathématiciens eux-mêmes. 1) L'imprévisibilité, c'est-à-dire le caractère inattendu de certains résultats dont la « réalité *sui generis* » s'impose à nous avec surprise. 2) Le thème du fondement, atteint ou deviné, permettant d'impulser dans les deux cas la réorganisation et la clarification de tout un champ de l'activité mathématique.

Les trois figures caractéristiques dépendent de l'accentuation plus ou moins forte de l'un ou de l'autre thème.

La première figure est illustrée par l'analyse de la fonction ζ d'Euler à Riemann où priment l'opacité et l'imprévisibilité. D'abord, Granger, s'appuyant essentiellement sur les commentaires d'Euler lui-même et d'André Weil, souligne la fréquence de termes tels que « caché », « merveilleux », profond, dans la description du cheminement de la pensée d'Euler. Ceci, qu'il s'agisse du problème calculatoire initial sur les séries, en passant par la réflexion sur la fonction ζ , qu'Euler définit sur ce que nous appelons aujourd'hui les nombres réels, jusqu'à la connexion qu'il parvient à établir entre celle-ci et les nombres premiers. La nature opaque des propriétés des nombres premiers est donc pour Euler un aspect mystérieux et merveilleux que dissimulent les dissymétries calculatoires et qu'il ne désespère pas de percer. Ceci, en particulier, pour le problème de la convergence de $\zeta(s)$ pour s entier impair, qui est bien plus ardu que celui pour les entiers pairs.

Ensuite, en parcourant l'analyse des conjectures envisagées par Riemann sur la fonction ζ (appliquée au plan complexe) jusqu'au travail de Dedekind qui explore son application aux nombres algébriques en ouvrant ainsi à la théorie moderne des corps de classes,⁽¹⁵⁾ Granger souligne l'étonnante distance entre les résultats d'Euler et ceux de Dedekind. Ces derniers, qui fondent les rapports entre algèbre et théorie des nombres, connaîtront de très féconds développements. Cette distance illustre « the theme of a

(15) Ici Granger s'appuie principalement sur les travaux de Blanchard et de Rowe & McLeary.

progressive, laborious and unexpected revelation of mathematical objects with other objects of an apparently greatly distant nature » qui fait écho à l'émerveillement ressenti par Euler. Granger insiste également sur le fait que la profondeur conceptuelle, attestée par la fécondité des développements issus des résultats de Dedekind, doit toujours être recherchée dans les conjectures ou les résultats et non pas dans les calculs qui peuvent en être le support. Ces calculs peuvent être de difficiles et demander une grande habilité mais ils ne sont jamais dits profonds.

La seconde figure de la profondeur, où cette fois le caractère fondationnel domine, est illustrée par deux exemples.

Le premier (où l'analyse bourbakienne est largement mise à contribution) porte sur les développements d'un résultat du physicien **George Gabriel Stokes** (1819-1903). La formulation moderne du théorème est donnée par l'élégante formule :

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega$$

qui se lit ainsi : « the integral of a *differential form* ω of whatever degree upon the boundary of a *differential manifold* c is equal to the integral of its *external derivative* on the *boundary of the manifold* ». Granger relève trois aspects de ce théorème dans son analyse. D'abord, le passage de la formulation de Stokes à la formulation moderne permet de mettre l'accent sur l'« uniformisation du sens » que ce résultat procure aux concepts de forme différentielle et de dérivée externe par rapport aux opérateurs de gradient, de rotationnel et de divergence. Ensuite, cette uniformisation de sens repose sur l'introduction de certains concepts « radicaux » permettant d'exprimer plus profondément le contenu opérationnel général de ces trois opérateurs et de rendre compte de leurs aspects aussi bien algébriques qu'analytiques ou géométriques. Ces nouveaux concepts — de variété, de frontière, et de forme différentielle — sont constitutifs, selon Granger, d'un univers d'objets plus fondamentaux. Enfin, ajoute-t-il, le sens profond du théorème apparaît dans la dualité entre les concepts de forme différentielle et dérivée externe, une dualité dont le résultat est mis en exergue de façon explicite par la formule le représentant. Avec ce premier exemple Granger veut souligner que la profondeur d'un résultat, qui conduit à l'introduction de nouveaux concepts, n'est pas le fruit d'une généralisation mais plutôt d'une élucidation de structures qui demeuraient jusqu'ici « inaperçues ». Celles-ci permettent de

« fonder » des faits jusqu'alors épars, au sens où sont expliquées aussi bien leurs diversités que leurs analogies.

Le second exemple de cette deuxième figure de la profondeur est livré par le théorème de Stone-Weierstrass. La première version de ce théorème, établie par Weierstrass en 1885, concerne « the polynomial approximation of a continuous real function of a real variable on a closed limited interval ». Granger précise « It is a question, therefore, of a specific sentence which authorizes in a certain way a *calculation* of approximation ». ⁽¹⁶⁾ La forme que Stone lui donne en 1948 montre à l'inverse : « the profound nature of the relationship between continuous functions and the set, structured as an algebra, of the polynomes, the terms of which are no longer simply the powers of the variable, but are themselves the powers of real continuous functions suitably chosen » (*ibid.*). Concernant les sous-algèbres de fonctions, le théorème va donc au de-là de la question originale de l'approximation pour élucider la structure du système des fonctions réelles continues bornées. Dès lors, ce théorème, plutôt que de généraliser, simplifie tout un domaine d'investigation.

Dans la dernière figure de la profondeur considérée par Granger, opacité et caractère fondationnel sont mobilisés dans une égale mesure pour expliquer comment un fait, qui apparaît d'abord surprenant et étrange, peut donner lieu à des recherches débouchant sur la création de nouveaux objets et, par conséquent, renouveler profondément le domaine sur lequel reposait la théorie précédente. On part du résultat bien connu de non-unicité de la décomposition en facteurs premiers de certains anneaux d'entiers pour aboutir à la définition des idéaux par Kummer et aux résultats de Dedekind avec l'exploration inattendue de l'univers des corps et des modules. Granger conclut l'analyse de cette troisième figure ainsi :

"Thus the fact of non-unicity discovered by Kummer is profound. It leads to the construction of these new objects that are the ideals; moreover, this "invention" — in the double sense of discovery and construction — is the origin of a recasting of basic concepts which will constitute contemporary algebra. One sees how, in this third figure of depth, the element of surprise before an unexpected mathematical fact is associated with the element of creation and exploration of a virtual universe extraordinarily fruitful of new facts." ⁽¹⁷⁾

(16) *op. cit.* p.97.

(17) *Op. cit.* p. 99

La conclusion de Granger repose sur les catégories de virtualité et de réalité, élaborées quelques années auparavant dans *Le probable, le possible et le virtuel* (1995), au terme d'une longue méditation nourrie par ses travaux sur Aristote et Wittgenstein. La notion de profondeur révélerait l'épaisseur des *virtualités* mathématiques qui s'actualisent dans des *réalités*, une fois qu'une forme leur est donnée par le travail mathématique, une fois que le génie du mathématicien les a « créés et découvertes ». Cette conclusion ne peut être comprise, nous semble-t-il, que si l'on admet la nécessité *sui generis* des objets mathématiques. Comme l'expliquera en effet Granger dans son article « Déterminisme et nécessité »⁽¹⁸⁾, il y a un lien étroit entre la nature systémique (structurale) des systèmes opératoires dans lesquels les objets mathématiques émergent et « l'exigence d'existence » de ces derniers. C'est donc par un passage particulièrement éloquent de ce dernier article que nous concluons cette partie avant de nous tourner vers Alain Michel pour terminer notre présentation.

« [La] spécificité de la nécessité mathématique, par delà [le] caractère logique [de ses démonstrations], vient de la réalité profondément *systémique* des objets. Nous voulons dire par là que l'objet mathématique n'est défini que par son *insertion* dans un système de présupposés, ou par son *émergence* imprévue à l'intérieur d'un système. Système cohérent sans doute ou du moins dont la cohérence, qui peut être originairement imparfaite, deviendra bientôt effective. Le nombre irrationnel, par exemple, est d'abord un objet irréel mais dont le *système* opératoire arithmétique exige l'existence, et qui sera plus tard intégré comme membre légitime du nouveau système cohérent des nombres réels. Cette cohérence, aspect logique de la nécessité d'existence, n'est souvent obtenu qu'après coup. Ce n'est point d'elle que procède l'aspect efficace et fécond de cette nécessité d'existence, mais de la *systématicité* dans laquelle l'objet a un sens opératoire. Lorsque naît le calcul infinitésimal, par exemple dans sa version leibnizienne, les grandeurs infinitésimales sont *nécessairement* introduites pour donner un sens aux opérations d'intégration et de différentiation. Le nouveau calcul forme système opératoirement, quoique non

(18) G.G. Granger, « Déterminisme et nécessité », dans *Philosophes en Liberté*, Ellipses (2001) pp 9-23,

encore logiquement cohérent, et c'est de cette inclusion dans un système que vient la nécessité des liaisons entre ces nouveaux objets, et leur propre existence comme virtualité nécessaires » (*op. cit* p15)

Ainsi, pour Granger, plutôt que de révéler une grammaire philosophique (au sens de Wittgenstein), l'analyse précise des textes mathématiques à travers la notion de profondeur permet d'éclairer une forme d'« ontologie modérée » adaptée à des réalités mathématiques dont la virtualité n'exclut pas l'épaisseur conceptuelle.

L'analyse de Michel. À première vue, Michel semble reprendre d'assez près les trois figures typiques précédentes puisque son analyse historique porte sur des exemples illustrant les mêmes trois « composantes thématiques caractéristiques de la profondeur » : l'imprévisibilité, ramenée comme dans le cas de Granger à l'opacité des objets mathématiques, la généralité et l'abstraction qui, comme chez Granger permettent de réunifier des domaines mathématiques jusqu'à alors séparés, et enfin, la fécondité d'un nouveau fondement, issu de travaux dont l'importance de la postérité est attestée.⁽¹⁹⁾ Cependant, et toute la différence est là, la matière de ses analyses est limitée à la théorie des nombres, objet du dernier exemple de Granger. Ce choix est destiné à comparer les potentialités de l'analyse historique à l'analyse épistémologique pour mettre celle-ci à l'épreuve.

Pour illustrer le thème de l'imprévisibilité Michel choisit la méthode de la descente infinie de Fermat. Une méthode qualifiée par Fermat de « route singulière ». Au demeurant, cette méthode lui a permis non seulement de parvenir à la démonstration de propositions difficiles, mais également à formuler des conjectures, parmi lesquelles la plus fameuse démontrée par Andrew Wiles en 1994. Pour Michel, la méthode de la descente infinie constitue une authentique création mathématique et rien ne laissait pressentir à Fermat, lors de sa création, sa fécondité étonnante.

Le deuxième exemple, sur la généralisation abstractive, traite des nombres idéaux par Kummer, « exemple paradigmatique de

(19) On remarquera que Michel dans la suite de son analyse utilise souvent le mode conditionnel pour marquer probablement une distance critique par rapport à la donnée de ces trois composantes. Il soutient qu'elles ne peuvent que regrouper assez grossièrement (p 184) les thèmes typiques de la notion de profondeur. Peut-être les guillemets dans le titre de son article sont également l'expression de cette prise de distance.

profondeur mathématique », nous dit Michel. Il retrace le développement des pistes suivies par Kummer dès ses premiers travaux sur les entiers cyclotomiques jusqu'aux diviseurs premiers idéaux, introduits pour rétablir l'unicité de décomposition en facteurs premiers (que la méthode de la descente infinie de Fermat permettait de démontrer pour les entiers) dans le cas de certains systèmes de nombres comme les anneaux dits non euclidiens d'entiers.

Le troisième exemple, traité très rapidement, concerne le développement ensembliste que Dedekind a donné à la théorie de Kummer mentionné plus haut avec le troisième exemple de Granger. La critique de l'interprétation de la profondeur du travail de Dedekind proposée par Granger — et partagée par Cavaillès — est explicitée dans la dernière section où Michel réhabilite l'approche de Kronecker contre celle de Dedekind.

Plutôt que de restituer l'analyse historique de Michel, détaillée de façon approfondie dans l'article *Après Cavaillès, l'histoire des mathématiques*, paru en 1998 (*op.cit.*), nous voudrions faire deux remarques générales sur son approche.

La première concerne directement le rapport à l'histoire.

Nous avons conjecturé plus haut qu'il y avait deux points de désaccord implicites entre Michel et Granger. Le premier porterait sur la question de la nécessité mathématique, thèse défendue par Granger à la suite de Cavaillès. Le second porterait sur l'idée d'une théorie générale du style empiétant sur l'analyse historique.

La longue analyse comparative des travaux de Kronecker et de Dedekind vise justement à montrer que les deux auteurs partagent la même intention de généraliser les travaux de Kummer, mais n'aboutissent pas, contrairement à ce que soutient Granger, à la même structure. La généralisation de Dedekind s'appuie sur une théorie ensembliste, qui s'oppose à la tradition calculatoire de Gauss et de Kummer, mais elle n'est pas dictée par une nécessité interne aux mathématiques. Choisir comme le fait Dedekind de donner la priorité à des définitions non constructives, faisant intervenir des ensembles infinis en acte, plutôt que de définir implicitement les objets, par la donnée de critères effectifs et algorithmiques d'équivalence ou de congruence, comme le fait Kronecker, ne relève pas du style, mais de préférences philosophiques. Celles-ci doivent être évaluées non pas tellement en fonction de ce que les mathématiciens en disent, mais par l'examen de ce qu'ils font. Or, l'orientation que Dedekind donne aux travaux de Kummer (décrite par Michel dans le détail), comme la reformulation des œuvres de Kummer

et de Kronecker que proposera Hilbert, ont, en un sens, fait disparaître de la scène mathématique (en les rendant de fait obsolète) les choix constructiviste et algébrique qui le caractérisaient. Il faudra attendre longtemps pour que ce jugement hâtif soit infléchi.⁽²⁰⁾ C'est que le formalisme même, dans lequel les mathématiques s'expriment, et la manière dont celles-ci sont enseignées, peuvent orienter notre regard en occultant d'autres possibilités de conceptualisation. Pour cette raison, seule une étude historique attentive, loin de nous mener à des conclusions trompeuses et cavalières, peut permettre de réévaluer l'importance des travaux de Kronecker et nous rappeler qu'une autre voie peut être prise à partir des travaux de Kummer. Il n'y a donc que l'histoire, avec son analyse minutieuse des œuvres mathématiques et des enchaînements des résultats d'un texte à un autre, qui peut nous permettre de comprendre la valeur mathématique (et non idéologique) des voies alternatives. En somme, l'histoire des mathématiques n'est pas assimilable, comme le voudrait la conception positiviste, à un long fleuve où les résultats s'accumulent de manière linéaire pour rejoindre en un grand delta la mer de nos connaissances. Elle ressemblerait plutôt à un cours d'eau qui change de lit, et qui forme plutôt un estuaire, où des branches considérées comme mortes, car l'eau y stagne, peuvent être réactivées par le courant principal, alors que des branches qui étaient vues de longue date comme les plus riches et puissantes peuvent se tarir.⁽²¹⁾ Reconstruire ces réseaux complexes, sans prétendre d'emblée (comme le voudrait Granger avec la stylistique) que les structures qui en émergent sont et demeureront toujours les mêmes revient à reconnaître que la créativité humaine ne supporte pas les camisoles que le philosophe-épistémologue voudrait lui faire porter. Le nécessitarisme et la stylistique sont bien, nous semble-t-il, les deux aspects de la philosophie de Granger mis en question par l'analyse historique de Michel.

La deuxième remarque porte sur l'attitude constructiviste qui est propre à Alain Michel et qui traverse tout son l'article. L'insistance avec laquelle il défend la place centrale des calculs, de la pensée algorithmique et des constructions effectives dans le mouvement

(20) Michel cite les travaux de Erich Hecke, Herman Weyl, Karl Ludwig Siegel et André Weil, comme exemples d'études profondes de mathématiciens qui ont su lire et analyser les œuvres de Kronecker à contrecourant de la *doxa*.

(21) « En mathématique, comme en toute matière scientifique, [la] leçon de l'histoire doit être, selon l'expression de George Canguilhem, conjuguée au passé réfléchi » A. Michel « Après Jean Cavaillès, l'histoire des mathématiques » (*op. cit*) p. 134.

de création des mathématiques a un rôle important dans la critique de la position «nécessitariste». Il nous semble qu'il serait important, pour conclure, d'en évaluer la portée, même du point de vue de ceux qui ne partagent pas cette exigence. Rappelons brièvement, pour ce faire comment elle intervient dans les aspects de l'analyse de la profondeur.

D'abord, en commentant la notion d'imprévisibilité, après avoir explicitement cité Granger et son concept de dualité⁽²²⁾ et avoir rappelé que d'après ce dernier l'imprévisibilité serait à expliquer par l'opacité des objets mathématiques, Michel remarque toutefois que ce phénomène se manifeste historiquement très tôt dans l'histoire des mathématiques dès que des règles et des objets ont été posés, c'est-à-dire dès qu'il y a calcul, avant même les mathématiques grecques. Comme le note M. Caveing, dès qu'il y a calcul (c'est-à-dire règles opératoires normées accomplies sur les objets d'un véritable domaine opératoire) on rencontre deux types de propriétés :

«celles des objets du champ qui peuvent interdire certains actes, comme la soustraction ou l'inversion, et celle des opérations elles-mêmes, qui déterminent surtout l'enchaînement des actes. Chaque objet se manifeste comme une singularité opératoire, qui, autorisant telle opération avec telle ou telle autre ou l'interdisant, est dit posséder par-là telle propriété » (p187)

Mais visiblement cette prétendue objectivité des propriétés des objets, qui leur appartiendrait en tant que telle, n'est qu'un leurre selon Michel :

«Une propriété qui en fait est celle du champ se trouve convertie (par la subjectivité du mathématicien calculateur) en celle de l'objet. Ce sont les propriétés du champ qui règlent les opérations qui s'y effectuent, donc aussi le mode d'avènement des objets » (*ibid*).

À première vue, on pourrait croire que nous sommes tout près de Granger, mais cette insistance sur le calcul est bien l'indice d'une prise de distance, où la conception constructiviste et «algorithmique» des mathématiques, défendue par Michel, le conduit à une critique sévère des positions de ceux qui négligent ou méprisent l'importance inductive des calculs dans la création de résultats

(22) Les analyse de Desanti et de Caveing sont également sollicitées ici pour expliquer ce phénomène de l'opacité.

mathématiques profonds. Le point crucial, indépendamment du réquisit algorithmique, nous semble le suivant : sauf à attribuer une réalité métaphysique à la notion de champ opératoire, sauf à utiliser la notion de virtualité dans un sens qui va bien au-delà de la virtualité d'un calcul qui suit des règles, il faut toujours avoir à l'esprit qu'il s'agit de champs opératoires concrets, des actes de construction de la pensée conceptuelle dans son opérativité calculatoire. Sans l'aspect calculatoire, algorithmique, l'analyse des systèmes d'opérations semble en effet demander ou bien l'analyse du sujet qui les accomplit ou bien l'analyse des objets que ces opérations visent.

Ensuite dans l'analyse de Kummer et de Kronecker, sur la question de la généralisation et de la fécondité, Michel insiste sur le fait que lors du processus de généralisation : « Il y a bien si l'on veut fondement, mais ce fondement est de nature opératoire, et non logique (ensembliste) » (p187). S'il y a idéalisation, ajoute-t-il, sa mise en forme reste constamment opératoire, et en effet le contexte de l'invention de Kummer est constamment un contexte d'usage. Pour cette raison l'analyse est inductive et exploite essentiellement les résultats du calcul, car l'abstraction est construite par Kummer à partir des algorithmes, et en particulier à partir de celui de la divisibilité. La profondeur est donc ici essentiellement un geste opératoire, à partir des résultats étonnants d'un calcul. À partir d'une anomalie calculatoire, le processus de création s'amorce pour retrouver dans des nouvelles règles opératoires sa solution. Il faudrait donc juger de la fécondité d'une théorie à partir de l'extension de ses mêmes capacités opérationnelles, et non pas par sa seule force déductive. Le point crucial de l'analyse d'Alain Michel nous semble ici proche d'une considération que l'on retrouve dans un domaine tout à fait différent chez Kurt Gödel. Dans les ébauches (rédigées entre 1951 et 1959) d'un article consacré à la thèse de Carnap selon laquelle les mathématiques ne seraient que la syntaxe du langage, Gödel remarque que les calculs sont aux mathématiques ce que les protocoles expérimentaux sont aux sciences de la nature. En ce sens les théories mathématiques peuvent bien rencontrer des réfutations au même titre que les sciences naturelles. Même donc d'un point de vue tout à fait réaliste comme celui de Gödel, il est juste de souligner l'importance de la pensée algorithmique en mathématique, car sans le calcul on ne peut pas « tester » ou « infirmer » les théories mathématiques dans leurs conséquences observables, d'où l'énorme progrès, souligné

par Michel, que l'usage de l'informatique a permis en ce domaine. Encore, aurait-on envie d'ajouter, faudrait-il pouvoir comprendre ce que la machine fait, et ramener l'anomalie ou la réfutation des conjectures dans un cadre théorique approprié, et, pour ce faire, passer de l'analyse algorithmique pas à pas à une vision globale du système opératoire, dont la machine est incapable. D'où le problème (que Michel ne pouvait pas connaître en 1997) d'évaluer attentivement ce que les démonstrations assistées par ordinateur peuvent nous permettre d'accomplir. En tout cas, la fin de l'article avance une curieuse et inattendue confirmation de l'enquête historique par le développement technologique de l'informatique sur laquelle il faudra méditer.